Algorithmes pour la planification de mouvements en robotique non-holonome

Frédéric Jean

Unité de Mathématiques Appliquées
ENSTA

Le 02 février 2006

Outline

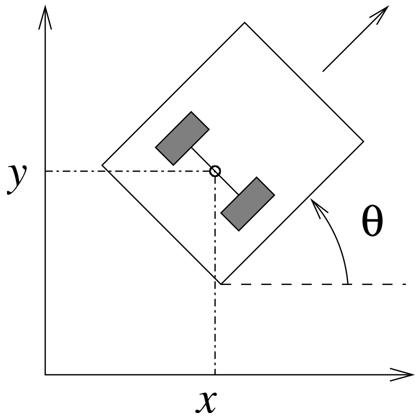
Modélisation Géométrique d'un Robot

- Robot $=$ point dans E, **espace des configurations**
- En général, $E =$ un ouvert d'un $\mathbb{R}^n$ ou une variété

Exemple type

La voiture simplifiée (ou unicycle) :

$$(x, y, \theta) \in E = \mathbb{R}^2 \times S^1 \text{ ou } \mathbb{R}^3$$



- Obstacles $=$ ensemble fermé $O \subset E$

$\Rightarrow$ espace de travail $= E \setminus O$

Modélisation du Mouvement

Deux types de robots :

- **holonome :** pas de restriction sur le déplacement

  $\longrightarrow$ tout chemin dans E est un mouvement autorisé

- **non-holonome :** soumis à des contraintes cinématiques

  $\longrightarrow$ mouvements autorisés $=$ chemins $q(t)$ dans E t.q.

$$\dot{q}(t) \in V_{q(t)} \subsetneq \mathbb{R}^n \quad \forall t$$

Voiture $=$ robot non-holonome

Contrainte de roulement sans glissement : $\dot{x} \sin\theta - \dot{y}\cos\theta = 0$

$$\Longrightarrow \dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subsetneq \mathbb{R}^3$$

Exemples de Robots Non-Holonomes

- Contraintes de roulement sans glissement :
  - robots mobiles à roues ;
  - manipulation par des mains robotisées.
- Conservation du moment angulaire :
  - robots manipulateurs flottant dans l'espace ;
  - satellites avec roues à inertie ;
  - robots astronautes, plongeurs, sauteurs (phase de vol).
- Autres sources de contraintes non-holonomes :
  - loi de Lorentz-Wong en électromagnétisme ;
  - réduction par symétrie de cinématiques holonomes.

Problème de la Planification des Mouvements

Problème (PPM)

Étant données deux configurations q_0 et $q_1 \in E$,

trouver un chemin **faisable** $q(t)$, $t \in [0, T]$, dans E

t.q. $\quad q(0) = q_0$ et $q(T) = q_1$

Point de Vue de la Théorie du Contrôle

- En général, pour q fixé, $V_q =$ partie d'un SEV, i.e.

$$V_q = \{u_1 f_1(q) + \cdots + u_m f_m(q) \ : \ u \in U \subset \mathbb{R}^m\} \qquad (m < n)$$

où $f_i : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est appelé un **champ de vecteurs**.

- $q(t)$ est un chemin faisable $\Leftrightarrow$ il existe $u : [0, T] \to U$ t.q.

$$\dot{q}(t) = u_1(t) f_1\big(q(t)\big) + \cdots + u_m(t) f_m\big(q(t)\big)$$

Chemins faisables = trajectoires du **système non-holonome**

$$\dot{q} = u_1 f_1(q) + \cdots + u_m f_m(q),$$

où $u = (u_1, \ldots, u_m) \in U$ est le **contrôle**.

Exemple de la Voiture

Système de contrôle :

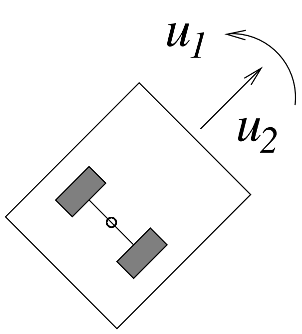
$$\dot{q} = u_1 f_1(q) + u_2 f_2(q)$$

avec les champs de vecteurs

$$f_1(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_2(q) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

et le contrôle $u = (u_1, u_2)$:

$$\begin{cases} u_1 = \dot{\theta} & \text{vitesse angulaire} \\ u_2 = \pm\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} & \text{vitesse tangentielle} \end{cases}$$



Reformulation du PPM

Problème de la Planification des Mouvements

Étant données deux configurations q_0 et $q_1 \in E$,

trouver une loi de contrôle $u(t)$, $t \in [0, T]$, dans U

t.q. la solution de

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = u_1(t) f_1\big(q(t)\big) + \cdots + u_m(t) f_m\big(q(t)\big) \\ q(0) = q_0 \end{cases}$$

vérifie $q(T) = q_1$

(i.e. $u(\cdot)$ amène le système de q_0 à q_1).

Classe des Contrôles

- En théorie, contrôle $=$ fonction intégrable (L^1)
- En pratique, contrôle $=$ **fonction continue par morceaux**

Cas des extensions dynamiques :

Très souvent, le contrôle "physique" est $\dot{u}$, et non u.

Exemple : contrôles "réels" de la voiture

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \ddot{\theta} & \text{accélération angulaire (via le volant)} \\ \dot{u}_2 & \text{accélération tangentielle (accélérateur/frein)} \end{cases}$$

$\longrightarrow$ Même formulation pour le PPM, mais

$u(t)=$ **fonction dérivable** et contrôle réel $= \dot{u}$.

Décidabilité du PPM

Dans toute la suite, **robot = système non-holonome**

Problème de la commandabilité

Étant données deux configurations q_0 et $q_1 \in E$,

existe-t-il une loi de contrôle $u(\cdot)$ dans U

amenant le système de q_0 à q_1 ?

Si c'est toujours le cas, le système est dit **commandable**.

Crochets de Lie

Exemple de la Voiture

Contrainte : direction transverse interdite

créneau possible $\Longrightarrow$ voiture = système commandable

Explication

Créneau = suivre f_2, puis f_1, puis $-f_2$, puis $-f_1$.

Or : $$e^{-tf_1} e^{-tf_2} e^{tf_1} e^{tf_2}(q_0) = e^{t^2[f_1,f_2]}(q_0) + o(t^2),$$

où $[f_1, f_2](q) = Df_2(q) \cdot f_1(q) - Df_1(q) \cdot f_2(q)$ **crochet de Lie**.

Pour la voiture, $[f_1, f_2] = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$ = direction transverse

Algèbre de Lie

Définition

$\mathrm{Lie}(q) =$ l'ensemble des combinaisons linéaires de

- $f_1(q), \dots, f_m(q)$,
- tous les $[f_i, f_j](q)$, pour $i, j \in \{1, \dots, m\}$,
- tous les $[[f_i, f_j], f_k](q)$, pour $i, j, k \in \{1, \dots, m\}$,
- $\dots$

est appelé **l'algèbre de Lie** du système.

Remarque : $\mathrm{Lie}(q)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Pour la voiture, $\mathrm{Lie}(q) = \mathbb{R}^3$.

Robotique non-holonome
Méthodes de planification existantes
Nos axes de recherche
Les systèmes non-holonomes
Commandabilité
Principes pour la planification

Commandabilité

$$(\Sigma) \qquad \dot q = u_1 f_1(q) + \cdots + u_m f_m(q), \quad q \in E, \ u \in U$$

Théorème de Chow (1938)

Supposons $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, connexe et $U \subset \mathbb{R}^m$ contient $\mathrm{Vois}(0)$.

Si $\dim \mathrm{Lie}(q) = n \qquad \forall q \in E$

le système (Σ) est commandable.

Remarque : Dans ce cas, la commandabilité est vraie pour toutes les classes de contrôles denses dans L^1, par exemple C^∞ ou constants par morceaux.

F. Jean
Algorithmes de planification des mouvements

Hypothèse

Dans toute la suite, on supposera que

la condition de Chow est satisfaite

$\Longrightarrow$ Le PPM a toujours une solution.

Remarque : Si la condition n'est pas satisfaite, on peut généralement s'y ramener en reparamétrant.

Méthodes de Planification des Mouvements

Quatre idées générales pour la planification :

- mimer les crochets de Lie (créneaux !) ;
- se ramener à un système connu ;

Méthodes existantes

- utiliser une approximation du système ;
- déformer continûment une trajectoire.

Nos axes de recherche

Méthodes Basées sur l'Algèbre de Lie

$$(\Sigma) \qquad \dot{q} = u_1 f_1(q) + \cdots + u_m f_m(q), \quad q \in E$$

Principe

1. Choisir des crochets de Lie $g_{m+1}, \ldots, g_n$ de $f_1, \ldots, f_m$ t.q.
$$\text{Vect}\,\{f_1, \ldots, f_m, g_{m+1}, \ldots, g_n\}(q) = \mathbb{R}^n$$
2. Résoudre le PPM pour le système **holonome**
$$\dot{q} = v_1 f_1(q) + \cdots + v_m f_m(q) + v_{m+1} g_{m+1}(q) + \cdots + v_n g_n(q).$$
3. Écrire $v(\cdot)$ en fonction du contrôle $u(\cdot)$ du système (Σ).

Calcul de $u(t)$ en Fonction de $v(t)$

[Lafferriere/Sussmann, 1993]

- Pour q_1 suffisamment proche de q_0, on a :
$$q_1 = e^{t_1 f_1} \cdots e^{t_m f_m} e^{t_{m+1} g_{m+1}} \cdots e^{t_n g_n}(q_0) \qquad \longrightarrow \quad v(\cdot)$$
- Pour chaque g_i, $\quad e^{s g_i} = \prod_j e^{\alpha_i^j(s) f_{i_j}} + o(s).$
- Donc
$$\prod_{i,j} e^{\alpha_i^j(t_i) f_{i_j}}(q_0) = q_1 + o(\|t\|) := q^{(1)} \qquad \longrightarrow \quad u^{(1)}(\cdot)$$
- En itérant à partir de $q^{(1)}$, on obtient une suite $q^{(k)}$,
$$q^{(k)} \to q_1 \qquad \text{quand } k \to \infty.$$

Exemple de la Voiture

Soient $q_0 = 0$ et $q_1 = (x, y, \theta)$

- Choisissons $g_3 = [f_1, f_2]$: $\qquad q_1 = e^{\theta f_1} e^{x f_2} e^{y g_3}(0)$

  i.e. $v(t) = (0, 0, y)$, puis $(0, x, 0)$, puis $(\theta, 0, 0)$

- Pour $y \geq 0$, $\qquad e^{y[f_1, f_2]} = e^{-\sqrt{y} f_1} e^{-\sqrt{y} f_2} e^{\sqrt{y} f_1} e^{\sqrt{y} f_2} + o(y)$,

  $\Rightarrow \quad q^{(1)} = e^{\theta f_1} e^{x f_2} e^{-\sqrt{y} f_1} e^{-\sqrt{y} f_2} e^{\sqrt{y} f_1} e^{\sqrt{y} f_2}(0) = q_1 + o(\|q_1\|)$

  $u^{(1)}(t) = (0, \sqrt{y})$, puis $(\sqrt{y}, 0)$, puis ...

Calcul de $u(t)$ en Fonction de $v(t)$ – Autre Solution

[Sussmann/Liu, 1991]

Utiliser des contrôles oscillants de fréquence et amplitude arbitrairement grands.

Exemple de la voiture

Prenons $q_0 = 0$ et $q_1 = (0, y, 0) = e^{y g_3}(0)$, $\quad$ i.e. $v(t) \equiv (0, 0, y)$.

Appliquons $u^N(t) = \sqrt{N}\big(\cos(Nt), \sin(Nt)\big)$. $\quad$ Quand $N \to \infty$:

$$q^N(t) \sim \Big(\frac{1 - \cos(Nt)}{\sqrt{N}}, \frac{t}{2}, \frac{\sin(Nt)}{\sqrt{N}}\Big) \qquad \Rightarrow \qquad q^N(2) \to q_1.$$

Inconvénients

- Contrôles de très mauvaise qualité :
  - soit grand nombre de manœuvres et non dérivables ;
  - soit très oscillants.
- Convergence locale.
- Méthode itérative.

Systèmes Équivalents

Principe

Transformer (Σ) en un système "connu".

- Transformation par chgt de coordonnées et retour d'état :

$$z = \phi(q), \quad v = A(q)u$$

$\Rightarrow$ un système **équivalent** à (Σ) (mêmes trajectoires) :

$$\dot{z} = v_1 \widetilde{f_1}(z) + \cdots + v_m \widetilde{f_m}(z),$$

où $\widetilde{f} = \phi_* f$ transport de f par ϕ.

Classes de Systèmes Connus

- On sait résoudre le PPM pour :
  - les systèmes linéaires : $\dot{x} = Ax + Bu$

    MAIS, si (Σ) non-holonome $(m < n)$ et commandable,

    (Σ) n'est jamais équivalent à un syst. linéaire ;
  - les systèmes nilpotents ;
  - les systèmes chaînés (systèmes nilpotents particuliers).

Systèmes Nilpotents

Définition

(Σ) est **nilpotent d'ordre** k si tous les crochets de Lie itérés des $f_1, \ldots, f_m$ de longueur $> k$ sont nuls.

Intérêt :

- La "formule du créneau" est exacte : si g crochet de Lie,

$$e^{tg} = \prod_j e^{\alpha^j(t) f_{i_j}}$$

$\Longrightarrow$ la méthode de planification [LafSu93] est :
directe (pas d'itération), exacte et globale.

Systèmes Nilpotents (Suite)

- Le système est polynômial et de forme triangulaire :

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^{m} u_j \ \mathrm{pol}_i(q_1, \ldots, q_{i-1})$$

$\Rightarrow$ intégrable avec des commandes polynômiales.

Inconvénients majeurs :

- nilpotentisation $=$ propriété non générique ;
- pas de critère général de nilpotentisation.

[E. Cartan, Goursat]

Nilpotentisation de la Voiture

- En appliquant la transformation $z = \phi(q)$, $v = A(q)u$:

$$\begin{cases} z_1 = x\cos\theta + y\sin\theta \\ z_2 = \theta \\ z_3 = x\sin\theta - y\cos\theta \end{cases}, \qquad \begin{cases} v_1 = u_2 - u_1 z_3 \\ v_2 = u_1 \end{cases}$$

le système s'écrit

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = v_1 \\ \dot{z}_2 = v_2 \\ \dot{z}_3 = v_2 z_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{f}_1(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{f}_2(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

- On a $[\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2] = (0, 0, 1)$ et tous les autres crochets sont nuls.

Systèmes Chaînés

Définition *[Murray/Sastry, 1991]*

(Σ) est un **système chaîné** s'il s'écrit $(m = 2)$:

$$\begin{aligned} \dot q_1 &= u_1 \\ \dot q_2 &= u_2 \\ \dot q_3 &= u_1\, q_2 \\ &\vdots \\ \dot q_n &= u_1\, q_{n-1} \end{aligned}$$

Intérêt :

- facile à commander (nilpotent) ;
- il existe une CNS pour la mise sous forme chaînée ;
- systèmes linéarisables dynamiquement **(systèmes plats)**.

Algorithmes par Approximation

[F. Jean, J-P. Laumond, G. Oriolo, M. Vendittelli, 2001 - 2006]

Principe

1. Choisir un système : $(\widehat{\Sigma}) \quad \dot q = \sum_{i=1}^{m} u_i \widehat{f}_i(q),$ t.q.
   - $(\widehat{\Sigma})$ est une approximation de (Σ) en q_1,
   - on a une solution du PPM pour $(\widehat{\Sigma})$.
2. Choisir $u(\cdot)$ amenant $(\widehat{\Sigma})$ de q_0 à q_1.
3. Appliquer $u(\cdot)$ à (Σ) à/p de q_0 $\quad \rightarrow \quad q^{(1)} := \mathrm{Approx}(q_0, q_1)$.
4. Itérer le processus $\quad \rightarrow \quad q^{(k+1)} := \mathrm{Approx}(q^{(k)}, q_1)$.

Convergence

Que faut-il pour obtenir un algorithme convergent ?

- **Localement :** la fonction Approx doit être contractante, i.e.

  pour chaque q_1, $\exists\, \beta(q_1) > 0$ t.q.

  $$d(q^{(k)}, q_1) < \beta(q_1) \quad \Longrightarrow \quad d(q^{(k+1)}, q_1) \leq \frac{1}{2} d(q^{(k)}, q_1),$$

  pour une distance d à définir.

- **Globalement :** Approx uniformément contractante

  (β indépendant de q_1).

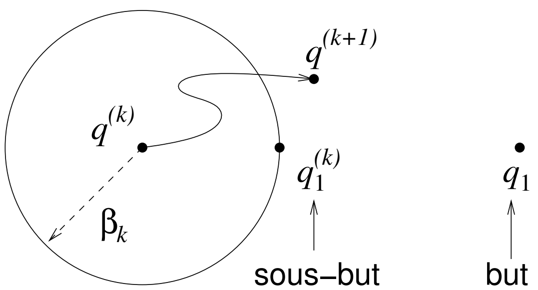
Algorithme Global

Algorithme de type **régions de confiance** :

Étape k

$q^{(k)}$ = point courant
β_k = rayon de confiance

1. calculer $q_1^{(k)}$;
2. $q^{(k+1)} := \mathrm{Approx}(q^{(k)}, q_1^{(k)})$;
3. if $d(q^{(k+1)}, q_1^{(k)}) < \frac{1}{2} d(q^{(k)}, q_1^{(k)})$
   - then $\beta_{k+1} := \beta_k$
   - else $\beta_{k+1} := \beta_k / 2$



$\longrightarrow$ algorithme convergent si Approx uniformément contractante.

La Fonction Approx

Il reste à construire une fonction Approx unif$^{\mathrm{t}}$ contractante.

Rappel : définition de $\mathrm{Approx}(q_0, q_1)$

1. Soit un système : $\quad (\widehat{\Sigma}) \quad \dot{q} = \sum_{i=1}^{m} u_i \widehat{f}_i(q), \quad$ t.q.
   - $(\widehat{\Sigma})$ est une approximation de (Σ) en q_1,
   - on peut calculer $u(\cdot)$ amenant $(\widehat{\Sigma})$ de q_0 à q_1.
2. Appliquer $u(\cdot)$ à $(\Sigma) \quad \rightarrow \quad q^{(1)} := \mathrm{Approx}(q_0, q_1)$.
3. Approx unif$^{\mathrm{t}}$ contractante si

$$d(q_0, q_1) < \beta \quad \Longrightarrow \quad d(q^{(1)}, q_1) \leq \frac{1}{2} d(q_0, q_1).$$

Approximation au 1er Ordre

- Linéarisé de (Σ) en q_1 : $\quad \dot{x} = \sum_{i=1}^{m} v_i f_i(q_1)$

  non commandable (si $m < n$)

- On utilise une approximation non-holonome au 1er ordre

  [Agrachev, Hermes, Stefani, Bellaïche, Jean ... 90's]

Pour la voiture, où $f_1 = (0,0,1)$ et $f_2 = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$:

- linéarisé en $q = 0$: $\quad f_1(0) = (0,0,1), \;\; f_2(0) = (1,0,0)$
- approx$^{\mathrm{o}}$ NH en $q = 0$: $\quad \widehat{f}_1 = (0,0,1), \;\; \widehat{f}_2 = (1,\theta,0)$

Distance de Contrôle

- **Distance de contrôle** (ou distance sous-riemannienne) :

$$d(q_0, q_1) = \inf \mathrm{long}(u) \qquad \text{parmi les } u : q_0 \rightsquigarrow q_1,$$

où $\mathrm{long}(u) = \displaystyle\int_0^T \sqrt{u_1^2(t) + \cdots + u_m^2(t)}\,dt.$

- Si $(\widehat{\Sigma})$ approximation NH de (Σ) en q_1,

$$d\big(\mathrm{Approx}(q_0, q_1), q_1\big) = O\big(d(q_0, q_1)^{1+\varepsilon}\big)$$

(à condition que la commande $u(\cdot)$ pour $(\widehat{\Sigma})$ ne soit pas trop grande).

Cas Générique

Théorème

Pour un système (Σ) générique, il existe une approximation non-holonome $(\widehat{\Sigma})$ telle que :

- *$(\widehat{\Sigma})$ a une expression algébrique en fonction de (Σ) ;*
  [$\Rightarrow$ facile à calculer]
- *$(\widehat{\Sigma})$ est un système nilpotent ;*
  [$\Rightarrow$ facile à commander]
- *une fonction Approx basée sur $(\widehat{\Sigma})$ est unif^t contractante.*
  [$\Rightarrow$ l'algorithme global converge]

Méthode de Continuation

Principe

1. choisir un contrôle $u^0(\cdot)$;
2. appliquer $u^0(\cdot)$ à (Σ) à/p de $q_0 \quad \longrightarrow \quad \bar{q}$;
3. choisir un chemin $\gamma(s)$, $s \in [0,1]$, reliant $\bar{q}$ à q_1 ;
4. déformer $u^0(\cdot)$ en $u^s(\cdot)$, qui amène (Σ) de q_0 à $\gamma(s)$;
5. $u^1(\cdot) =$ solution du PPM .

Déformation

- **Application point final** en q_0 et T : $\quad \mathrm{End} : u(\cdot) \mapsto q_u(T)$

  où $q_u(\cdot)$ trajectoire de (Σ) associée à $u(\cdot)$ partant de q_0.

- $u^s(\cdot)$ défini par $\mathrm{End}(u^s) = \gamma(s) \;\Rightarrow\; d\mathrm{End}(u^s) \cdot \frac{du^s}{ds} = \frac{d\gamma}{ds}(s)$.

- Si $d\mathrm{End}(u^s)$ surjective, $\exists$ un pseudo-inverse $d\mathrm{End}(u^s)^\#$

  $\Rightarrow u^s =$ solution de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \dfrac{du^s}{ds} = d\mathrm{End}(u^s)^\# \cdot \dfrac{d\gamma}{ds}(s) \\ u^s{}_{|s=0} = u^0 \end{cases} \qquad s \in [0,1]$$

Caractéristiques

Intérêt

- Méthode exacte, sans itération
- Contrôles obtenus très réguliers
- Très bon comportement numérique
- Permet de prendre en compte des obstacles

Inconvénient

- Pas au point ! !

Difficulté

Déf : u est un **contrôle singulier** si $d\mathrm{End}(u)$ non surjective.

L'EDO donnant u^s n'est définie que sur les contrôles non singuliers
$\Rightarrow$ phénomène d'explosion près des contrôles singuliers :

solution u^s pas toujours définie en $s = 1$

Programme

- Caractériser les contrôles singuliers.
- Montrer que l'EDO les évite (ou la modifier pour les éviter).

État de l'Art

Preuves de convergence et simulations

- Pour une classe de systèmes sans contrôles singuliers
  [Chitour/Sussmann, 1993-2006]
- Pour un cas particulier avec contrôles singuliers connus
  [Alouges/Chelouah/Chitour, 2003]

Étude des contrôles singuliers

- Caractérisation des contrôles singuliers pour les systèmes génériques (au sens fort)
  [Chitour/Jean/Trélat, 2006]

Et voilà . . .