

IN103 - Introduction à Matlab

Projet Mécatronique

Commande d'un projecteur laser

wiertlewski@isir.upmc.fr

Dans ce projet, nous allons utiliser Matlab pour étudier la commande d'un système automatique. Nous prendrons l'exemple d'un projecteur laser. Ce dispositif permet d'afficher des dessins grâce à un faisceau de lumière laser. Ce type de système est actuellement utilisé pour le spectacle ou la publicité. Le principe est simple : deux moteurs actionnent deux miroirs, ceux-ci réfléchissent et orientent le faisceau laser, finalement on visualise un point sur un écran qui se déplacent avec la commande. Si un ensemble de points sont tracés rapidement, on produit une figure persistante pour l'oeil de l'observateur. Le but du projet est de convertir une image en une commande utilisable par les moteurs. Nous allons aborder ce problème du point de vue de la commande numérique assistée par ordinateur et créerons un simulateur pour reproduire le comportement du système réel.



FIGURE 1 – Exemple de projection laser

1 La description du projet

Notre cerveau peut reconstruire le mouvement à partir d'une séquence d'image. Celui-ci commence à nous paraître continu si la séquence est prise à un intervalle de temps suffisamment petit. Par exemple, les images d'une projection cinématographique (24 images par secondes) sont perçues comme une continuité d'événements. De même un pointeur laser agité rapidement sur un mur nous apparaît comme une ligne alors que ce n'est qu'un seul point en mouvement.

Dans ce projet, nous utiliserons cette propriété pour dessiner des formes avec un laser. Afin de produire des formes régulières, nous allons contrôler le mouvement du point laser de manière précise et rapide grâce à de petits miroirs motorisés (voir Fig. 2). Si la puissance du laser est répartie au cours du tracé sur toute la surface du dessin et si le parcours est répété à un rythme suffisamment rapide, l'observateur percevra une seule image continue dans le temps.



FIGURE 2 – Photographie des miroirs motorisés. De gauche à droite, le miroir de l'axe X, le miroir de l'axe Y et l'assemblage des 2 miroirs.

Le laser se réfléchit sur la surface des deux miroirs successivement. Une inclinaison de ceux-ci change la direction du laser. Pour obtenir une grande rapidité d'actionnement, les miroirs doivent être légers et donc petits, au plus proche du diamètre du faisceau laser. Le deuxième miroir est plus large pour prendre en compte la première déflexion du faisceau.

Chaque miroir est fixé sur l'axe d'un petit moteur optimisé pour de grandes performances en précision et rapidité. La tension au borne du moteur fait varier la vitesse de rotation de l'axe. Une boucle d'asservissement permet le contrôle en position angulaire du miroir. En général, cet asservissement est réalisé par un microcontrôleur ou un ordinateur où la commande est programmée de manière numérique.

D'autres opérations peuvent être programmées dans ce calculateur, par exemple la correction des déformations engendrées par la variation de la position de l'écran ou de la position des axes de rotations des miroirs.

La figure 3 schématise l'ensemble du système. Une position de consigne $L^{cons}(X^{cons}, Y^{cons})$ est convertie en consignes angulaires $(\theta_1^{cons}, \theta_2^{cons})$ corrigée pour les aberrations géométriques. Ensuite deux asservissements contrôlent les moteurs pour adapter leurs performances. Les miroirs actionnés par les axes des rotors orientent les réflexions du laser.

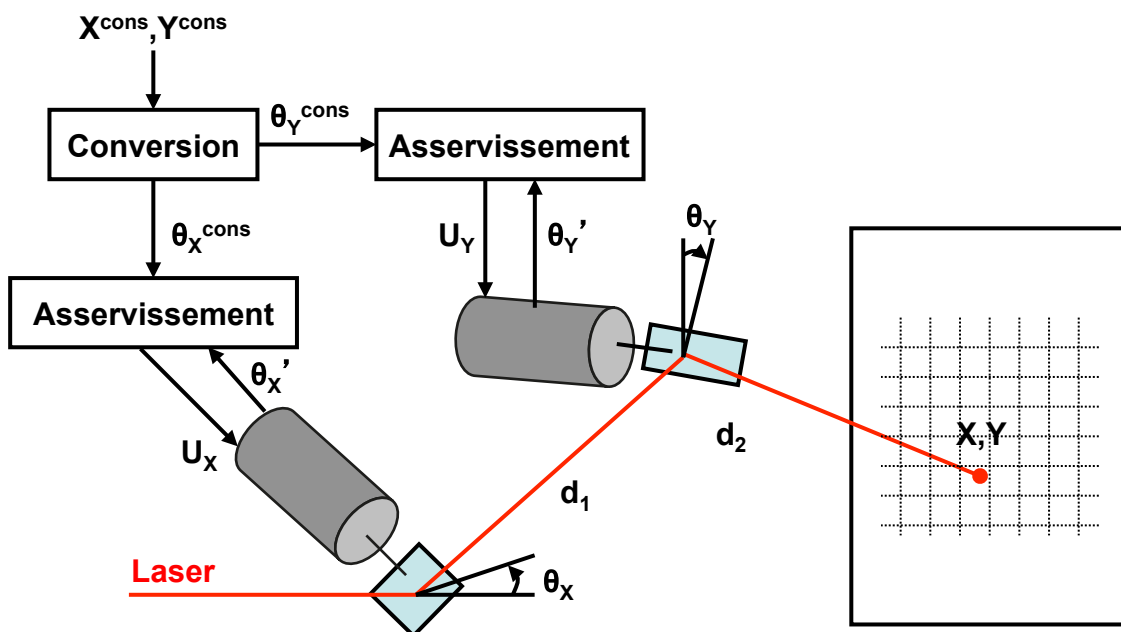


FIGURE 3 – Schéma représentant les étapes de commande par rapport à la trajectoire du faisceau laser.

2 Les moteurs

2.1 Le modèle

Dans cette partie, nous allons réaliser un simulateur du comportement des moteurs. Ce modèle remplace le moteur réel dans notre schéma de commande. Le moteur réel peut avoir un comportement légèrement différent dû aux hypothèses simplificatrices du modèle, aux aléas de fabrication et à l'usure.

Les moteurs utilisés pour actionner les miroirs sont spécialement conçus pour de faibles charges, de grandes vitesses et une grande précision. Ceci est obtenu notamment en éliminant les frottements entre le rotor et le stator. Comme nous utilisons un laser de 5 mm de diamètre et les miroirs adaptés (voir leurs caractéristiques en annexe), le constructeur Cambridge Technology recommande, pour ce type d'application, un moteur à courant continu de type 6220.

Les moteurs à courant continu (MCC) ont des modèles bien connu dont l'essentiel sera résumé ici (voir Fig. 4).

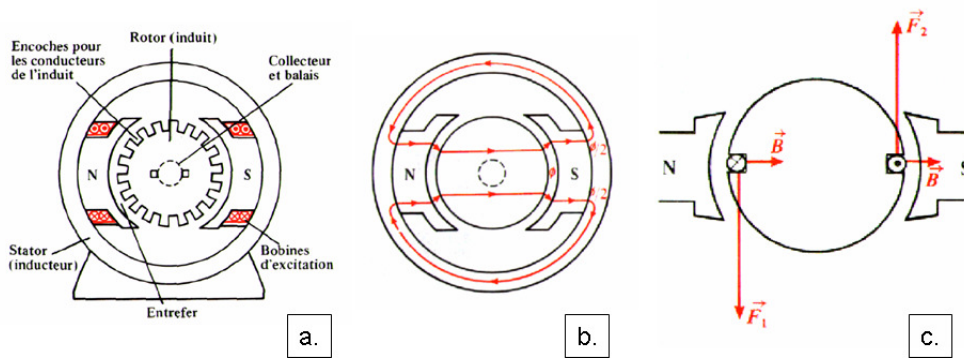


FIGURE 4 – Principe du moteur à courant continu. Moteur en coupe a. avec les pièces annotées b. avec les champs magnétiques c. avec les forces de Laplace pour une spire.

Un MCC est composé d'un stator et d'un rotor. Les bobines enroulées sur une partie du stator produisent un champ magnétique qui traverse le stator. Ce dernier est également entouré de fil conducteur. L'intensité qui circule dans ces fils et le champ magnétique induisent une force sur les fils, dite de Laplace. Le rotor est ainsi mis en mouvement.

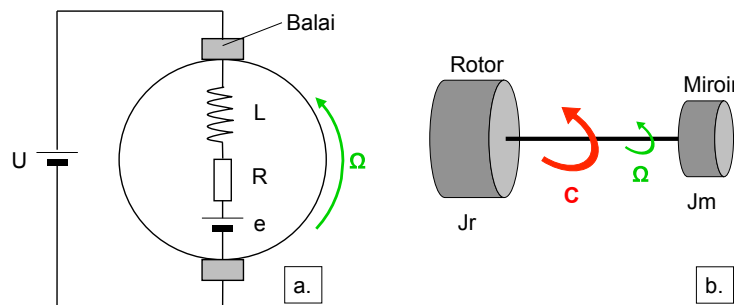


FIGURE 5 – Modélisation du rotor. a. Partie électrique. b. Partie mécanique.

Nous pouvons modéliser le rotor par deux équations couplées décrivant son comportement électrique et mécanique (voir Fig. 5). Nous utiliserons le modèle suivant pour la partie électrique :

$$U(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + e(t) \quad (1)$$

U est la tension de contrôle, i le courant dans le stator, e est la tension induite, R et L respectivement la résistance et l'inductance des bobines du stator.

Pour la partie mécanique, le modèle est le suivant :

$$(J_r + J_m) \cdot \frac{d\Omega(t)}{dt} = C(t) \quad (2)$$

J_r est le moment d'inertie du rotor du moteur et J_m celui du miroir (dans un premier temps, l'étude sera faite sur le moteur de l'axe X, voir en annexes pour les valeurs de J_m). $C(t)$ est le couple produit par le moteur, il n'y a pas de couple résistant dans notre cas. Ω est la vitesse de rotation et θ la position angulaire.

$$\Omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (3)$$

A ces équations s'ajoutent les propriétés de la tension et du couple induits propre au principe de Laplace :

$$e(t) = K_e \cdot \Omega(t) \quad (4)$$

$$C(t) = K_c \cdot i(t) \quad (5)$$

K_e et K_c sont respectivement la constante électrique et la constante de couple. Autrement dit, l'intensité qui circule dans les fils produisent un couple et le mouvement de rotation induise une tension supplémentaire dans les fils. Ici ces constantes auront la même valeur $K_e = K_c$.

Le constructeur donne les caractéristiques suivantes pour le moteur de type 6220 :

Modèle	6220		
Charge maximale	1.25	$g \cdot cm^2$	$= 10^{-7} kg \cdot m^2$
Inertie du rotor	J_r 0.125	$g \cdot cm^2$	$= 10^{-7} kg \cdot m^2$
Constante de couple	K_c 6.17	$10^4 \cdot dyne \cdot cm/A$	$= 10^{-3} N \cdot m/A$
Résistance des bobines	R 2.79	$ohms$	
Inductance des bobines	L 180	$10^{-6} H$	

2.2 Discrétisation du modèle

Afin de simuler ce moteur avec un outil numérique, votre ordinateur et le programme Matlab, nous allons discrétiser le système d'équations différentielles. C'est à dire, nous allons calculer l'évolution du système en incrémentant le temps. Si les incréments de temps sont suffisamment petit, nous pouvons utiliser des développement limité :

$$f(t_1) = f(t_0) + \frac{df(t_1)}{dt} * (t_1 - t_0) \quad (6)$$

D'où la représentation discrète suivante de la dérivée :

$$f'_k = \frac{f_k - f_{k-1}}{\Delta T} \quad (7)$$

ΔT sera appelée période d'échantillonnage. Si nous appliquons ce principe aux équations précédentes, nous obtenons le système suivant :

$$U_k = R \cdot i_k + L \cdot \frac{i_k - i_{k-1}}{\Delta T} + K_c \cdot \Omega_k \quad (8)$$

$$(J_r + J_m) \cdot \frac{\Omega_k - \Omega_{k-1}}{\Delta T} = K_c \cdot i_k \quad (9)$$

En isolant l'intensité, nous obtenons les pas de calcul suivant :

$$i_k = \frac{1}{R + \frac{L}{\Delta T} + \frac{K_c \cdot \Delta T}{J_r + J_m}} (U_k - K_c \cdot \Omega_{k-1} + \frac{L}{\Delta T} \cdot i_{k-1}) \quad (10)$$

$$\Omega_k = \frac{K_c \cdot \Delta T}{J_r + J_m} \cdot i_k + \Omega_{k-1} \quad (11)$$

$$\theta_k = \Omega_k \cdot \Delta T + \theta_{k-1} \quad (12)$$

Question 1. Réalisez une fonction ("Moteur_Ech") qui donne, à partir des conditions initiales, u_{k-1} , i_{k-1} , Ω_{k-1} et θ_{k-1} , l'intensité, la position et la vitesse angulaire, i_k , Ω_k et θ_k , après un intervalle de temps fixe ΔT (voir Fig. 6)

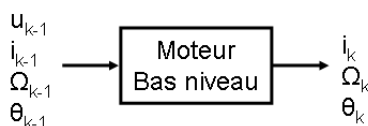


FIGURE 6 – Fonction bas niveau du moteur échantillonné

Question 2. Utilisez maintenant cette fonction dans une boucle pour afficher la réponse à un échelon de tension (Voir Fig. 7) ; N'oubliez pas de tenir compte des conditions initiales. Visualisez l'intensité $i(t)$, la position $\theta(t)$ et la vitesse $\Omega(t)$ angulaires pour plusieurs valeurs de la période d'échantillonnage ΔT . Comment évolue ces grandeurs en fonction du temps ? Quelle est l'influence de la période d'échantillonnage ? Quelle est selon vous une valeur satisfaisante pour cette période d'échantillonnage ?

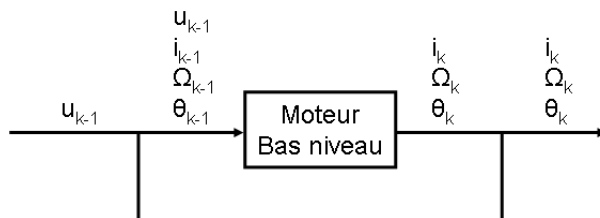


FIGURE 7 – Boucle de calcul sur la fonction bas niveau

Le résultat devrait ressembler à la figure suivante :

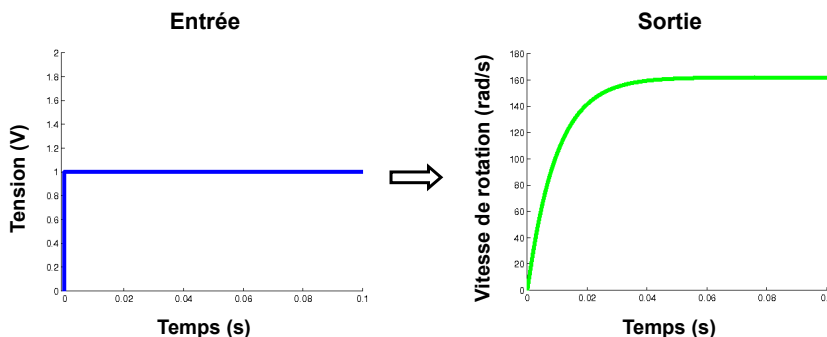


FIGURE 8 – A partir d'un échelon de tension (à gauche), nous obtenons une variation transitoire de la vitesse de rotation, puis une vitesse constante en régime permanent (à droite).

Nous prendrons dans la suite du sujet $\Delta T = 10^{-5}$.

3 L'asservissement en position

3.1 Construction de l'asservissement

Le but du système est de créer des dessins, il faut donc pour cela avoir un contrôle de la position du spot laser et donc des moteurs qui l'actionnent. Ce type de commande s'appelle le contrôle en position. Il faut réaliser un asservissement, c'est à dire minimiser l'erreur (ε) entre la consigne en position et la position angulaire réelle. Cette erreur sert de référence pour commander le moteur (voir la figure 9). Pour obtenir cette référence, les moteurs sont équipés de capteur en position angulaire qui seront dans notre cas considérer comme parfait ($\theta = \theta'$).

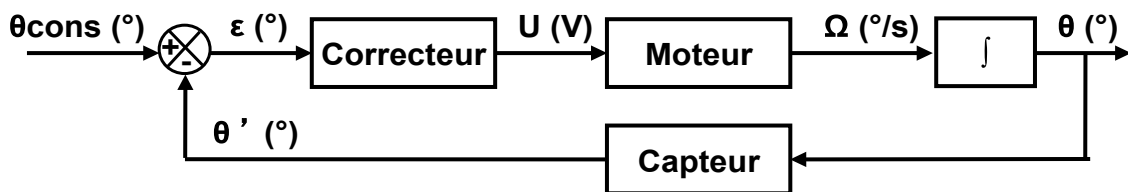


FIGURE 9 – Principe d'un asservissement en position angulaire. Dans une première étape, la position angulaire de consigne est comparée à la position mesurée par un capteur, puis cet écart à la consigne est utilisé pour générer une tension aux bornes du moteur. La vitesse de rotation produite est modifiée de sorte que la position angulaire évolue et converge vers la position de consigne.

Question 3. Réalisez une boucle d'asservissement en utilisant directement l'erreur comme tension d'entrée du moteur.

Question 4. Amplifiez maintenant le signal d'erreur grâce à un gain constant, P , pour augmenter la tension au borne du moteur. Que constatez -vous? Testez les trois valeurs suivantes, $P = 10, 100, 1000$. Le gain P a-t-il un effet positif ou négatif sur la rapidité de l'asservissement ?

3.2 Réglage du correcteur

Le constructeur indique qu'un asservissement efficace permet d'obtenir un temps de réponse à 99% de $500\mu s$ pour des petits angles. On appelle temps de réponse à 99%, le temps que mets le système à se stabiliser autour de $\pm 1\%$ de la valeur de la consigne en position. Les petits angles sont des angles $< 1^\circ$ soit $< 0,01$ rad. Il recommande également de ne pas dépasser certaine valeur d'intensité dans le moteur au risque de l'endommager voir le tableau récapitulatif suivant.

Model	6220
Intensité max. en régime permanent	3.7 A
Intensité max. en pic	20 A
Temps de réponse à 99% pour des petits angles	500 μs

Question 5. Affichez l'intensité au borne du moteur en même temps que la réponse en position (utilisez la fonction matlab subplot). Évaluez le temps de réponse à 99% pour une consigne en position angulaire de 0.01 rad. Est-ce que le gain proportionnel permet d'obtenir ces performances sans dépasser les limites d'intensité ?

Le correcteur proportionnel peut être amélioré. Pour cela, nous pourrions rajouter un facteur proportionnelle à l'accroissement de l'erreur.

$$U_k = P \cdot \epsilon_k + \frac{D}{\Delta T} \cdot (\epsilon_k - \epsilon_{k-1}) \quad (13)$$

Ainsi si l'erreur augmente rapidement, la tension sera d'autant plus élevée. Ceci permet de prendre plus rapidement de la vitesse. De même si l'erreur diminue, la tension sera réduite de manière à éviter les dépassements. Ce correcteur s'appelle proportionnel dérivé, car il prend en compte la dérivée de l'erreur.

Question 6. En prenant pour P la valeur 16, trouvez une valeur satisfaisante pour le gain du correcteur dérivé, D.

3.3 Seuil en intensité

Pour pouvoir utiliser les moteurs pour des échelons de grandes amplitudes, il faut limiter l'intensité circulant dans les bobines du stator.

Question 7. Dans le fonction du moteur bas niveau, ajouter un seuil sur l'intensité, afin de limité sa valeur entre + et - 20 A. Tester votre moteur pour des consignes d'amplitude plus importante. Que constatez-vous ?

Question 8. Afin d'améliorer les performances pour les grandes amplitudes, modifiez la valeur du gain P. Faut-il la diminuer ou l'augmenter ? Pourquoi ?

Pour la suite du sujet, nous fixons les gains pour un temps de réponse maximale d'environ 1ms quelque soit les amplitudes de consignes.

Question 9. Le miroir de l'axe Y n'a pas la même caractéristique J_m que pour l'axe X. Créer une deuxième fonction qui englobe les 2 correcteurs et les 2 moteurs (voir Fig. 10).

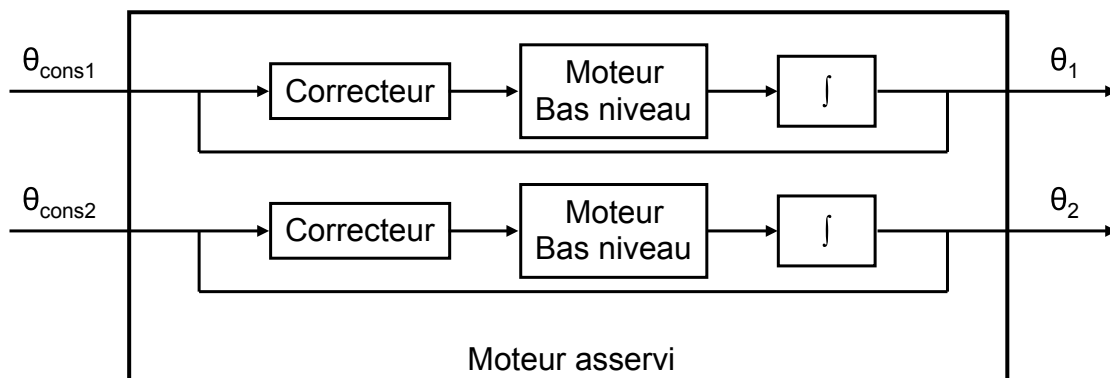


FIGURE 10 – Fonction des 2 moteurs asservis

4 Le modèle géométrique

Nous allons maintenant nous intéresser au parcours du laser. Le laser part d'un point L_0 puis va se réfléchir sur un premier miroir d'axe de rotation X avant de se réfléchir sur un deuxième miroir d'axe de rotation Y. Les angles pris par ces miroirs induisent une plus ou moins grande déflexion sur la trajectoire du laser (voir Fig. 11).

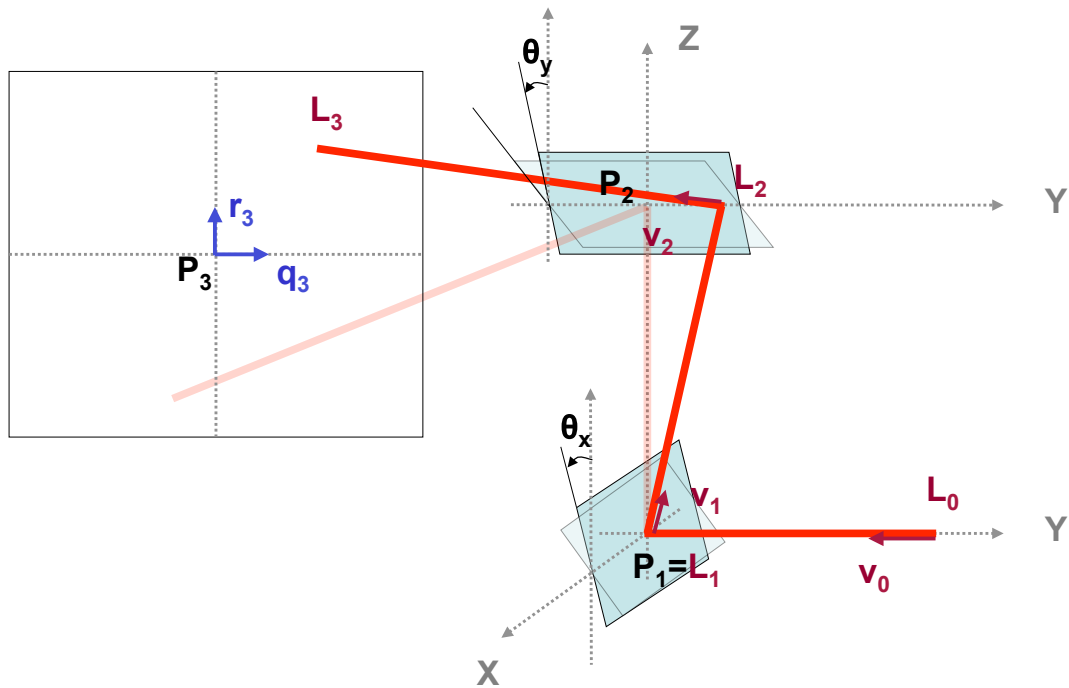


FIGURE 11 – Représentation de la géométrie du problème. Le faisceau laser se réfléchit sur un premier miroir actionné par un moteur d'axe de rotation X, puis se reflète sur un second miroir actionné selon l'axe Y avant d'être dirigé vers l'écran.

Cette description géométrique est difficile à établir et peut être amenée à être modifiée selon l'environnement. Il peut être intéressant de ne pas devoir connaître précisément les distances entre chaque élément et d'utiliser une technique de calibration pour relier la position sur l'écran aux positions angulaires des miroirs. Un système réel pourrait être calibré en utilisant une caméra et un traitement d'image. Nous vous proposons une fonction qui simule cette mesure *MG.m* (Modèle Géométrique), elle renvoie la position sur l'écran (en mètres) qui pourrait être mesurée par une caméra en fonction des positions angulaires (en degrés) à la sortie des moteurs.

Question 9. Utilisez cette fonction du modèle géométrique et enregistrez les positions sur l'écran. En considérant que la conversion entre les positions angulaires et les positions est directe ($\theta_X^{cons} = X^{cons}$, $\theta_Y^{cons} = Y^{cons}$), mettez en évidence les déformations géométriques obtenues avec un dessin simple de consigne, affichez le résultats en 2D sur une nouvelle fenêtre.

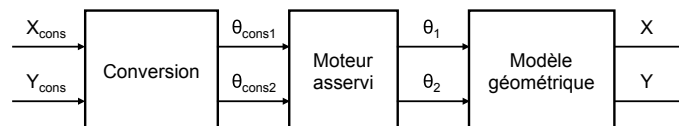


FIGURE 12 – Fonctions en série de la conversion, du moteur asservi et du modèle géométrique

5 La conversion des consignes

Suite à la dernière question, nous pouvons remarquer que l'image est déformée par la géométrie du trajet du faisceau laser. Une conversion directe voire une homothétie ne seront pas satisfaisantes. Nous allons donc créer une conversion sous forme de polynôme. Soit la fonction $\theta_X^{cons}(L_X^{cons}, L_Y^{cons})$ aura des

termes en L_X^{cons} et L_Y^{cons} , mais également en $(L_X^{cons})^2$, en $(L_Y^{cons})^2$, en $L_X^{cons} \cdot L_Y^{cons}$, etc...

$$\begin{aligned} \theta_X^{cons}(L_X^{cons}, L_Y^{cons}) = & \alpha_0 + \alpha_X \cdot L_X^{cons} + \alpha_Y \cdot L_Y^{cons} + \alpha_{XY} \cdot L_X^{cons} \cdot L_Y^{cons} \\ & + \alpha_{XX} \cdot (L_X^{cons})^2 + \alpha_{YY} \cdot (L_Y^{cons})^2 + \dots \end{aligned}$$

De même pour la consigne en Y :

$$\begin{aligned} \theta_Y^{cons}(L_X^{cons}, L_Y^{cons}) = & \beta_0 + \beta_X \cdot L_X^{cons} + \beta_Y \cdot L_Y^{cons} + \beta_{XY} \cdot L_X^{cons} \cdot L_Y^{cons} + \\ & + \beta_{XX} \cdot (L_X^{cons})^2 + \beta_{YY} \cdot (L_Y^{cons})^2 + \beta_{XY} \cdot L_X^{cons} \cdot L_Y^{cons} + \dots \end{aligned}$$

Pour les déterminer, il faut réaliser une calibration de notre projecteur. Une petite camera permettra dans cette phase de calculer les gains pour chaque terme. Pour cela, nous allons prendre une conversion directe ($\theta_X^{cons} = X^{cons}$, $\theta_Y^{cons} = Y^{cons}$) et enregistrer avec la camera les positions parcourues sur l'écran ($L_X(i)$, $L_Y(i)$).

Tout d'abord, pour déterminer les termes constants, nous allons chercher la consigne qui permet de centrer les positions sur l'écran L_X et L_Y . Il faut pour cela utiliser le modèle du moteur et le modèle géométrique et effectuer une boucle en position jusqu'à ce que nous trouvions les valeurs de θ^X et θ^Y qui annule X et Y (voir Fig.13)

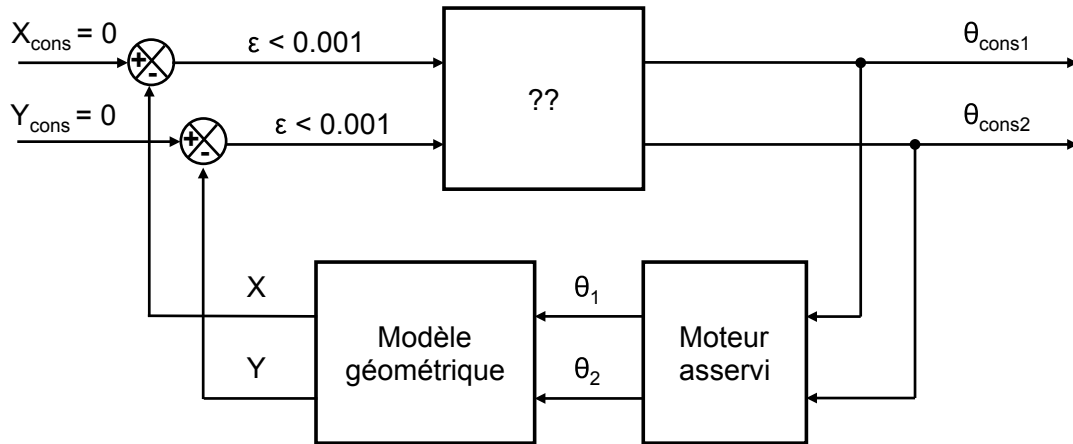


FIGURE 13 – Boucle d'asservissement permettant de placer le faisceau au point central (0, 0) sur l'écran. La boucle s'arrête lorsque $\epsilon < 0.001$ soit 1 millimètre.

Question 10. Créez une première fonction qui détermine α_0 et β_0 en reproduisant la boucle d'asservissement proposée par la Fig.13. Utilisez un correcteur proportionnel dérivé pour une convergence plus rapide vers 0.

Pour trouver les autres coefficients, nous vous proposons une méthode appelée interpolation polynomiale, nous remplissons une matrice d'observation :

$$M_{obs} = \begin{pmatrix} L_X(1) & L_Y(1) & L_X(1)L_Y(1) & (L_X(1))^2 & (L_Y(1))^2 & \dots \\ L_X(2) & L_Y(2) & L_X(2)L_Y(2) & (L_X(2))^2 & (L_Y(2))^2 & \dots \\ L_X(3) & L_Y(3) & L_X(3)L_Y(3) & (L_X(3))^2 & (L_Y(3))^2 & \dots \\ L_X(4) & L_Y(4) & L_X(4)L_Y(4) & (L_X(4))^2 & (L_Y(4))^2 & \dots \\ L_X(5) & L_Y(5) & L_X(5)L_Y(5) & (L_X(5))^2 & (L_Y(5))^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Lorsque celle-ci est carrée, nous pouvons l'inverser M_{obs}^{-1} et la multiplier la matrice des positions de consigne :

$$M_{cons} = \begin{pmatrix} L_X^{cons}(1) - \alpha_0 & L_Y^{cons}(1) - \beta_0 \\ L_X^{cons}(2) - \alpha_0 & L_Y^{cons}(2) - \beta_0 \\ L_X^{cons}(3) - \alpha_0 & L_Y^{cons}(3) - \beta_0 \\ L_X^{cons}(4) - \alpha_0 & L_Y^{cons}(4) - \beta_0 \\ L_X^{cons}(5) - \alpha_0 & L_Y^{cons}(5) - \beta_0 \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Nous obtenons ainsi une matrice de coefficient :

$$M_{coef} = \begin{pmatrix} \alpha_X & \beta_X \\ \alpha_Y & \beta_Y \\ \alpha_{XY} & \beta_{XY} \\ \alpha_{XX} & \beta_{XX} \\ \alpha_{YY} & \beta_{YY} \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Question 11. Calculez les coefficient α et β , grâce à l'opération matricielle $M_{coef} = M_{obs}^{-1} \cdot M_{cons}$

Question 12. Testez vos coefficients de conversion. Ils doivent vous permettre d'obtenir une position sur l'écran qui correspond à la consigne en position. Illustrez les résultats sur une nouvelle figure.

L'approximation polynomiale est très pratique, car il suffit d'une calibration avant le début de la projection pour déterminer les coefficients. La conversion n'ajoute alors aucune boucle de calcul dans la commande puisqu'elle ne nécessite que la construction de 2 polynômes. Par contre, elle peut être limitée à de petites variations d'angles des moteurs, soit de petites images ou des écrans éloignés.

6 Le logiciel de visualisation

Matlab permet de réaliser une interface utilisateur pour pouvoir agir plus intuitivement sur les paramètres d'un problème et visualiser les résultats.

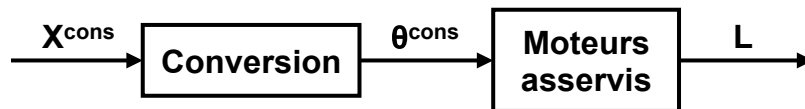


FIGURE 14 – Etapes de commande du système de projecteur laser. Elle comprend une conversion en série avec l'asservissement en position.

Question 14. Assemblez les étapes de commande du système de projection laser dans une même fonction (voir Fig. 14). Testez celle-ci avec une interface utilisateur qui permette de lancer une calibration, de changer la position de consigne manuellement, qui affiche le résultat et la consigne afin de les comparer.

Question 15. Proposez ensuite des formes simples dans un menu déroulant afin de tester la conversion et affichez le résultat sur la fenêtre.

Question 16. Lisez également les données de consignes pour une image compliquée à partir d'un fichier fourni et affichez le résultat. Essayez de reproduire la figure proposée le plus fidèlement possible.

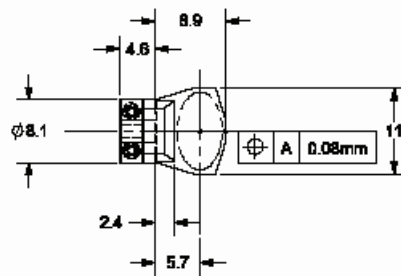
7 Annexes

Dessins techniques des miroirs de l'axe X et Y pour un laser de 5 mm de diamètre

6220 5mm Mirror Outline

$$J = .074 \text{g} \cdot \text{cm}^{-2}$$

X Configuration

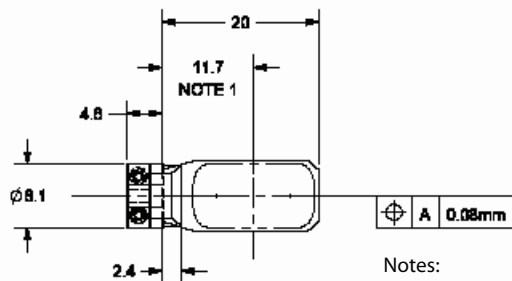


Notes:

1. Dimension from the end of the shaft to the center of the clear aperture.
2. Clear aperture: Major Axis = 10.0mm, Minor Axis = 5mm
3. Beam aperture = 5mm
4. Angles of incidence = $45^\circ \pm 15^\circ$
5. Screw size = #00 -90 x 3/16"
6. Hex key size = .035"
7. Recommended screw torque: 0.09N*m (0.8 in * lbs.)

Y Configuration

$$J = .086 \text{g} \cdot \text{cm}^{-2}$$



Notes:

1. Dimension from the end of the shaft to the center of the clear aperture.
2. Clear aperture: Major Axis = 15.6mm, Minor Axis = 8.2mm
3. Beam aperture = 5mm
4. Angles of incidence = $36.5^\circ \pm 15^\circ$
5. Screw size = #00 -90 x 3/16"
6. Hex key size = .035"
7. Recommended screw torque: 0.09N*m (0.8 in * lbs.)