13 Martingales à temps discret

13.1 Martingales, sur-martingales et sous-martingales

On se donne un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ainsi que d'une filtration $\{\mathcal{F}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$. On se donne une suite de variables aléatoires $\{\boldsymbol{u}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ définies sur l'espace Ω, à *valeurs réelles.* On suppose dans tout ce paragraphe que :

- la suite $\{\boldsymbol{u}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ est *adaptée* à la filtration $\{\mathcal{F}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$;
- chaque variable aléatoire $\boldsymbol{u}^{(k)}$ est *intégrable.*

Définition 5. On dit que la suite de variables aléatoires $\{\boldsymbol{u}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ est une *martingale* si elle vérifie la propriété :

$$\forall\, 0 \leq l \leq k \ , \ \ \mathbb{E}\left[\boldsymbol{u}^{(k)} \mid \mathcal{F}^{(l)}\right] = \boldsymbol{u}^{(l)} \ . \tag{116}$$

Par définition de l'espérance conditionnelle, la relation précédente est équivalente à :

$$\forall\, 0 \leq l \leq k \ , \ \ \forall F \in \mathcal{F}^{(l)} \ , \ \ \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_F \,.\, \boldsymbol{u}^{(k)}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_F \,.\, \boldsymbol{u}^{(l)}\right] \ ,$$

où $\mathbf{1}_F$ est la fonction indicatrice de l'ensemble F.

Définition 6. On dit que la suite $\{\boldsymbol{u}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ est une *sur-martingale* si elle vérifie la propriété :

$$\forall\, 0 \leq l \leq k \ , \ \ \mathbb{E}\left[\boldsymbol{u}^{(k)} \mid \mathcal{F}^{(l)}\right] \leq \boldsymbol{u}^{(l)} \ . \tag{117}$$

Enfin, on dit que la suite $\{\boldsymbol{u}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ est une *sous-martingale* si la suite $\{-\boldsymbol{u}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ est une sur-martingale.

On dispose de très nombreux résultats sur les martingales (voir [39], [17] ou encore [27]). On en rappelle ci-dessous les plus usuels, concernant des propriétés de majoration et de convergence.

Inégalités fondamentales. Les résultats de majoration sur les martingales sont pour la plupart issus du "lemme maximal" (voir [17, Ch. V, Théorème 20] pour l'énoncé et la preuve de ce lemme). On utilise principalement les corollaires suivants de ce lemme.

Proposition 10. ***(Lemme maximal pour les sur-martingales positives)***
Soit $\{\boldsymbol{u}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ une sur-martingale positive. Alors :

$$\forall \epsilon > 0 \ , \ \ \mathbb{P}\left(\sup_{0\leq l\leq k} \boldsymbol{u}^{(l)} \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{\epsilon}\mathbb{E}\left[\boldsymbol{u}^{(0)}\right] \ .$$

Preuve. Voir [17, Ch. V, Corollaire 21] ou [39, Ch. II, Proposition II-2-7]. □

Proposition 11. ***(Lemme maximal pour les martingales)***
Soit $\{\boldsymbol{u}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ une martingale de carré intégrable. Alors :

$$\forall \epsilon > 0 \ , \ \ \mathbb{P}\left(\sup_{0\leq l\leq k} \left|\boldsymbol{u}^{(l)}\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\mathbb{E}\left[\left|\boldsymbol{u}^{(k)}\right|^2\right] \ .$$

Preuve. Voir [17, Ch. V, Corollaire 22]. □

Remarque 36. On rappelle que si $\boldsymbol{u}^{(k)}$ est une martingale, alors $\left|\boldsymbol{u}^{(k)}\right|^2$ est une sous-martingale (composée d'une martingale par une fonction convexe) et on a donc :

$$\mathbb{E}\left[\left|\boldsymbol{u}^{(k)}\right|^2\right] = \sup_{0\leq l\leq k} \mathbb{E}\left[\left|\boldsymbol{u}^{(l)}\right|^2\right] \; .$$

□

Dans le cas où la martingale $\boldsymbol{u}^{(k)}$ est de la forme : $\boldsymbol{u}^{(k)} = \sum_{l=0}^{k} \boldsymbol{\xi}^{(l)}$, les incréments de martingale $\boldsymbol{\xi}^{(l)}$ étant indépendants, de carré intégrable et d'espérance nulle, on retrouve le résultat bien connu suivant.

Proposition 12. ***(Inégalité de Kolmogorov)***

$$\forall \epsilon > 0 \; , \quad \mathbb{P}\left(\sup_{0\leq l\leq k}\left|\boldsymbol{\xi}^{(0)} + \ldots + \boldsymbol{\xi}^{(l)}\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\sum_{l=1}^{k}\mathbb{E}\left[\left|\boldsymbol{\xi}^{(l)}\right|^2\right] \; .$$

Preuve. Voir [17, Ch. V, Remarques 23]. □

Convergence des martingales réelles. Les martingales étant les objets mathématiques apparaissant "naturellement" dans de nombreux problèmes d'optimisation stochastique, on se pose la question de la convergence de ces objets. Le premier résultat de convergence concerne les sur-martingales positives.

Théorème 16. ***(Convergence presque sûre des sur-martingales positives)***
Toute sur-martingale positive $\{\boldsymbol{u}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers une limite $\boldsymbol{u}^{(\infty)}$ qui vérifie :

$$\mathbb{E}\left[\boldsymbol{u}^{(\infty)} \mid \mathcal{F}^{(k)}\right] \leq \boldsymbol{u}^{(k)} \quad \forall k \in \mathbb{N} \; .$$

Preuve. Voir [17, Ch. V, Théorème 28] ou [39, Ch. II, Théorème II-2-9]. □

Le théorème suivant, plus général, fournit la convergence des martingales bornées dans L^1.

Théorème 17. ***(Convergence presque sûre des martingales réelles)***
Soit $\{\boldsymbol{u}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ une martingale ou une sur-martingale ou une sous-martingale. Si la condition :

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[\left|\boldsymbol{u}^{(k)}\right|\right] < +\infty \; ,$$

est vérifiée, alors, $\boldsymbol{u}^{(k)}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire intégrable $\boldsymbol{u}^{(\infty)}$.

Preuve. Voir [39, Ch. IV, Théorème IV-1-2] ou [6, Ch. XII, Théorème 2.4]. □

Remarque 37. L'hypothèse $\sup \mathbb{E}\left[\left|\boldsymbol{u}^{(k)}\right|\right] < +\infty$ est insuffisante pour avoir la convergence de $\boldsymbol{u}^{(k)}$ vers $\boldsymbol{u}^{(\infty)}$ dans L^1. Pour disposer de cette dernière propriété, il faut faire une hypothèse d'*uniforme intégrabilité* sur $\boldsymbol{u}^{(k)}$ (voir [6, Ch. XII] pour un exemple). □

Remarque 38. Notant respectivement $\boldsymbol{u}_+^{(k)} = \max\{0, \boldsymbol{u}^{(k)}\}$ et $\boldsymbol{u}_-^{(k)} = -\min\{0, \boldsymbol{u}^{(k)}\}$ la partie positive et la partie négative de la variable aléatoire $\boldsymbol{u}^{(k)}$, on a de manière évidente :

$$\left|\boldsymbol{u}^{(k)}\right| = \boldsymbol{u}_+^{(k)} + \boldsymbol{u}_-^{(k)} = \boldsymbol{u}^{(k)} + 2\boldsymbol{u}_-^{(k)} \; .$$

Dans le cas où $\boldsymbol{u}^{(k)}$ est une sur-martingale, on a toujours : $\mathbb{E}\left[\boldsymbol{u}^{(k)}\right] \leq \mathbb{E}\left[\boldsymbol{u}^{(0)}\right]$, de telle sorte que la sur-martingale converge si la condition suivante est vérifiée :

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[\boldsymbol{u}_-^{(k)}\right] < +\infty \; .$$

Dans le cas d'une sur-martingale *positive*, $\boldsymbol{u}_-^{(k)} = 0$; la convergence ne requiert alors pas d'hypothèse particulière. On a bien évidemment des résultats analogues pour les sous-martingales. □

Convergence des martingales vectorielles. Il n'y a pas de difficulté particulière à étendre la notion de martingale aux suites à *valeurs vectorielles* : étant donné un espace de Hilbert séparable $\mathbb{U}$ de norme $\| \,.\, \|$, la suite de variables aléatoires $\{\boldsymbol{u}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{U}$, intégrables et adaptées à la filtration $\{\mathcal{F}(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ est une martingale si l'on a :

$$\forall\, 0 \leq l \leq k\ ,\ \ \mathbb{E}\left[\boldsymbol{u}^{(k)} \mid \mathcal{F}^{(l)}\right] = \boldsymbol{u}^{(l)}\ .$$

On dispose d'un résultat de convergence similaire à celui obtenu pour les martingales réelles.

Théorème 18. ***(Convergence presque sûre des martingales vectorielles)*** *Soit $\mathbb{U}$ un espace de Hilbert séparable, soit $\{\boldsymbol{u}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ une martingale à valeurs dans $\mathbb{U}$. Si la condition suivante est vérifiée :*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[\left\|\boldsymbol{u}^{(k)}\right\|\right] < +\infty\ ,$$

alors $\boldsymbol{u}^{(k)}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire intégrable $\boldsymbol{u}^{(\infty)}$.

Preuve. Voir [39, Ch. V, Proposition V-2-8]. □

On dispose aussi du théorème de convergence suivant pour les martingales de puissance p-ème intégrable.[51]

Théorème 19. ***(Convergence des martingales vectorielles de puissance p intégrable)*** *Soit $p \in [1,2]$ et soit $\{\boldsymbol{u}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ une martingale à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ de puissance p-ème intégrable. On suppose que l'on a :*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}\left[\left\|\boldsymbol{u}^{(k)} - \boldsymbol{u}^{(k-1)}\right\|^p \mid \mathcal{F}^{(k-1)}\right] < +\infty\ .$$

Alors, $\boldsymbol{u}^{(k)}$ converge presque sûrement vers un vecteur aléatoire intégrable $\boldsymbol{u}^{(\infty)}$.

Preuve. Voir [27, Théorème 2.17]). □

Enfin, le théorème suivant traite de la vitesse de convergence pour les tableaux de martingales.

Théorème 20. ***(Convergence en loi des tableaux de martingales)*** *Soit $\{(\boldsymbol{u}^{(k,l)}, \mathcal{F}^{(k,l)}),\ k \geq 1\ \text{ et }\ 1 \leq l \leq k\}$ un tableau de martingales :*

$$\forall k \geq 1\ ,\ \ \forall l \leq k\ ,\ \ \mathbb{E}\left[\boldsymbol{u}^{(k,l+1)} \mid \mathcal{F}^{(k,l)}\right] = \boldsymbol{u}^{(k,l)}\ .$$

On suppose qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que les conditions suivantes sont réalisées :

- $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \sum_{l=1}^{k} \mathbb{E}\left[\left\|\boldsymbol{u}^{(k,l)} - u^{(k,l-1)}\right\|^{2+\epsilon}\right] = 0,$
- $\displaystyle\sup_{k\geq 1} \sum_{l=1}^{k} \mathbb{E}\left[\left\|\boldsymbol{u}^{(k,l)} - \boldsymbol{u}^{(k,l-1)}\right\|^{2}\right] < +\infty,$
- $\displaystyle\sum_{l=1}^{k} (\boldsymbol{u}^{(k,l)} - \boldsymbol{u}^{(k,l-1)})(\boldsymbol{u}^{(k,l)} - \boldsymbol{u}^{(k,l-1)})^\top \xrightarrow{\mathbb{P}} V.$

Alors, $\boldsymbol{u}^{(k,k)}$ converge en loi vers une loi normale centrée de covariance V :

$$\boldsymbol{u}^{(k,k)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,V)\ .$$

Preuve. Voir [20, Théorème 30]). □

[51] pour tout k, la variable aléatoire $\left\|\boldsymbol{u}^{(k)}\right\|^p$ est intégrable

13.2 Quasimartingales

On introduit ici un outil un peu plus général que les martingales, qui est utilisé dans les preuves de convergence du gradient stochastique généralisé. Les définitions et résultats que l'on présente ici sont issus de la référence [37].

Contenu d'un processus stochastique. On considère un processus stochastique $\boldsymbol{U}$ réel (c'est-à-dire une suite de variables aléatoires $\{\boldsymbol{u}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles) défini sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $\{\mathcal{F}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$. On supposera dans tout ce paragraphe que ce processus est *adapté* à la filtration et est *intégrable*.

Définition 7. On appelle *contenu* associé au processus stochastique $\boldsymbol{U}$ la quantité $\lambda_{\boldsymbol{U}}(k, F)$ définie pour tout indice $k \in \mathbb{N}$ et pour tout ensemble $F \in \mathcal{F}^{(k)}$ par la relation :

$$\lambda_{\boldsymbol{U}}(k, F) = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_F \,.\, (\boldsymbol{u}^{(k+1)} - \boldsymbol{u}^{(k)})\right] \ ,$$

où $\mathbf{1}_F$ est la fonction indicatrice de l'ensemble $F \subset \Omega$.

Remarque 39. Par définition de l'espérance conditionnelle, on a que :

- $\lambda_{\boldsymbol{U}}(k, F) = 0$ si $\boldsymbol{U}$ est une martingale,
- $\lambda_{\boldsymbol{U}}(k, F) \leq 0$ si $\boldsymbol{U}$ est une sur-martingale,
- $\lambda_{\boldsymbol{U}}(k, F) \geq 0$ si $\boldsymbol{U}$ est une sous-martingale. □

Définition 8. On appelle *variation à l'indice k du contenu* du processus stochastique $\boldsymbol{U}$ la quantité :

$$|\lambda_{\boldsymbol{U}}|(k) = \sup_{\mathcal{P}\in\mathfrak{P}^{(k)}} \sum_{F\in\mathcal{P}} |\lambda_{\boldsymbol{U}}(k, F)| \ ,$$

où $\mathfrak{P}^{(k)}$ est l'ensemble des *partitions finies* de Ω formées par des éléments de $\mathcal{F}^{(k)}$.

Définition 9. On appelle *variation totale du contenu* du processus stochastique $\boldsymbol{U}$ la quantité :

$$|\lambda_{\boldsymbol{U}}| = \sum_{k\in\mathbb{N}} |\lambda_{\boldsymbol{U}}|(k) \ .$$

Les notions précédentes de contenu permettent de définir la notion de *quasi-martingale*.

Définition 10. Un processus stochastique $\boldsymbol{U}$ est une *quasi-martingale* si la variation totale de son contenu est *bornée* :

$$|\lambda_{\boldsymbol{U}}| < +\infty \ .$$

Caractérisations. On définit $G^{(k)}$ comme étant le sous-ensemble de Ω sur lequel l'espérance conditionnelle de l'incrément $(\boldsymbol{u}^{(k+1)} - \boldsymbol{u}^{(k)})$ par rapport à la tribu $\mathcal{F}^{(k)}$ est positif :

$$G^{(k)} = \left\{\omega \in \Omega \quad \text{tel que} \quad \mathbb{E}\left[\boldsymbol{u}^{(k+1)} - \boldsymbol{u}^{(k)} \mid \mathcal{F}^{(k)}\right](\omega) > 0\right\} \ ,$$

et on note $\overline{G}^{(k)}$ son complémentaire dans Ω. Ces deux ensembles sont $\mathcal{F}^{(k)}$-mesurables, ils forment une partition finie de Ω et il est aisé de constater que :

$$|\lambda_{\boldsymbol{U}}|(k) = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{G^{(k)}} \,.\, (\boldsymbol{u}^{(k+1)} - \boldsymbol{u}^{(k)})\right] - \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\overline{G}^{(k)}} \,.\, (\boldsymbol{u}^{(k+1)} - \boldsymbol{u}^{(k)})\right] \ , \tag{118}$$

d'où, par définition de l'espérance conditionnelle :

$$|\lambda_{\boldsymbol{U}}|(k) = \mathbb{E}\left[\ \left|\mathbb{E}\left[\boldsymbol{u}^{(k+1)} - \boldsymbol{u}^{(k)} \mid \mathcal{F}^{(k)}\right]\right|\ \right] \ . \tag{119}$$

Des relations (118) et (119), on déduit immédiatement les deux propriétés suivantes.

Proposition 13. *Un processus stochastique X est une quasi-martingale si et seulement s'il vérifie :*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[\,\left|\mathbb{E}\left[\boldsymbol{u}^{(k+1)}-\boldsymbol{u}^{(k)} \mid \mathcal{F}^{(k)}\right]\right|\,\right] < +\infty\ .$$

Proposition 14. *Si le processus stochastique X vérifie les deux conditions :*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{G^{(k)}}\ .\ (\boldsymbol{u}^{(k+1)}-\boldsymbol{u}^{(k)})\right] < +\infty\ ,$$

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\overline{G}^{(k)}}\ .\ (\boldsymbol{u}^{(k+1)}-\boldsymbol{u}^{(k)})\right] > -\infty\ ,$$

alors X est une quasi-martingale.

En pratique, la propriété suivante est utile pour obtenir la propriété de quasi-martingale.

Proposition 15. *Si le processus stochastique X vérifie les deux conditions :*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{G^{(k)}}\ .\ (\boldsymbol{u}^{(k+1)}-\boldsymbol{u}^{(k)})\right] < +\infty\ ,$$

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[\boldsymbol{u}^{(k)}\right] > -\infty\ ,$$

alors X est une quasi-martingale.

Preuve. On a :

$$\sum_{l\leq k} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{G^{(k)}}\ .\ (\boldsymbol{u}^{(k+1)}-\boldsymbol{u}^{(k)})\right] + \sum_{l\leq k} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\overline{G}^{(k)}}\ .\ (\boldsymbol{u}^{(k+1)}-\boldsymbol{u}^{(k)})\right] = \mathbb{E}\left[\boldsymbol{u}^{(k+1)}\right] - \mathbb{E}\left[\boldsymbol{u}^{(0)}\right]\ ,$$

et donc, en passant à la limite en k :

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\overline{G}^{(k)}}\ .\ (\boldsymbol{u}^{(k+1)}-\boldsymbol{u}^{(k)})\right] \geq -\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{G^{(k)}}\ .\ (\boldsymbol{u}^{(k+1)}-\boldsymbol{u}^{(k)})\right] + \inf_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[\boldsymbol{u}^{(k)}\right] - \mathbb{E}\left[\boldsymbol{u}^{(0)}\right]\ ,$$

d'où le résultat. □

Convergence. On dispose pour les quasi-martingales d'un théorème de convergence presque sûre.

Théorème 21. ***(Convergence presque sûre des quasi-martingales)***
Soit $\{\boldsymbol{u}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ une quasi-martingale vérifiant :[52]

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[\boldsymbol{u}_-^{(k)}\right] < +\infty\ .$$

Alors, $\boldsymbol{u}^{(k)}$ converge presque sûrement vers $\boldsymbol{u}^{(\infty)}$, variable aléatoire intégrable, et l'on a :

$$\mathbb{E}\left[\left|\boldsymbol{u}^{(\infty)}\right|\right] \leq \liminf_{k\to+\infty} \mathbb{E}\left[\left|\boldsymbol{u}^{(k)}\right|\right]\ .$$

Preuve. Voir [37, § 9.4]. □

Remarque 40. Si l'on suppose que $\boldsymbol{U}$ est un processus positif ou nul, il est clair que les deux conditions :

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[\boldsymbol{u}^{(k)}\right] > -\infty \qquad \text{et} \qquad \sup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[\boldsymbol{u}_-^{(k)}\right] < +\infty\ ,$$

sont toujours vérifiées. Le processus converge donc presque sûrement à la seule condition :

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{G^{(k)}}(\boldsymbol{u}^{(k+1)}-\boldsymbol{u}^{(k)})\right] < +\infty\ .$$

□

[52] avec $u_-^{(k)} = -\min\{0, u^{(k)}\}$