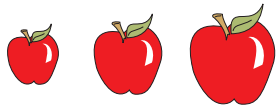


Relativité Restreinte



Relativité restreinte

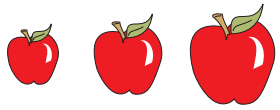
Insuffisances de la mécanique classique

- 🍏 Les équations de Maxwell ne sont valides que dans un seul référentiel (celui où la vitesse de la lumière est c)
- 🍏 Expérience de Michelson (1881) & Morley (1887) : La lumière viole le principe d'addition des vitesses de Galilée.

Einstein, Poincaré (1905) : Principe de relativité restreinte

”Les équations de la physique s’écrivent de la même façon dans tous les référentiels en translations uniformes les uns par rapports aux autres (référentiels galiléens).”

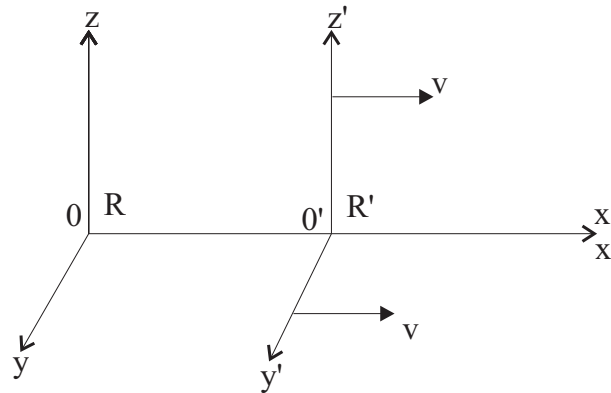
Equations de Maxwell $\Rightarrow c$ ne dépend pas du choix du référentiel



Transformation de Lorentz

M de coordonnées (x, y, z) à l'instant t dans un repère \mathcal{R} et (x', y', z') à l'instant t' dans un repère \mathcal{R}' .

\mathcal{R}' en translation rectiligne uniforme de vitesse $v \parallel Ox$ par rapport à \mathcal{R} .

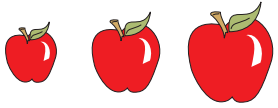


Mécanique classique : (transformation de Galilée)

$$\begin{cases} x' = x + vt & z' = z \\ y' = y & t' = t \end{cases} \quad (1)$$

Pour satisfaire, le Principe de Relativité Restreinte, nous devons donc chercher une relation plus compliquée de la forme

$$\begin{cases} x' = F(x, y, z, t) & y' = G(x, y, z, t) \\ z' = H(x, y, z, t) & t' = K(x, y, z, t) \end{cases} \quad (2)$$



Linéarité, Réversibilité, Invariance de ds^2 , ...
on note

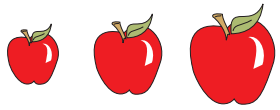
$$\beta = \frac{v}{c} \leq 1 \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \geq 1 \quad (3)$$

la relation entre les composantes d'un évènement dans \mathcal{R} et les composantes correspondantes dans \mathcal{R}' s'écrivent matriciellement

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^\pm & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad A^\pm := \pm \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \quad (4)$$

les définitions (3) montrent que $\gamma^2 - \gamma^2\beta^2 = 1$, comme $\gamma = \gamma(v)$, $\beta = \beta(v)$ on peut toujours trouver $\phi(v)$, $\gamma = \text{ch}(\phi)$ et $\gamma\beta = \text{sh}(\phi)$.

\Rightarrow La matrice A^+ est donc celle d'une rotation hyperbolique



Notations 4D

 4-vecteur position d'un évènement

 Composante contravariante

Dans \mathcal{R} donné, évènement $\Leftrightarrow (ct, x, y, z)$, plus généralement : Un évènement sera représenté par un vecteur de $\mathbb{M}_{4,\mathbb{R}}$ muni de la base $e_\mu (\mu=0,1,2,3)$

$$\mathbf{r} = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu \mathbf{e}_\mu \tag{5}$$

Conventions

$$cx^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y \text{ et } x^3 = z \tag{6}$$

$$\mathbf{r} = x^\mu \mathbf{e}_\mu = x^0 \mathbf{e}_0 + x^i \mathbf{e}_i \tag{7}$$

Nombres x^μ : composante contravariante du 4 vecteur \mathbf{r} .

 Produit scalaire

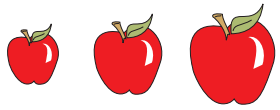
2 évènements $\mathbf{r} = x^\mu \mathbf{e}_\mu$ et $\mathbf{s} = y^\nu \mathbf{e}_\nu$

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} := x^\mu \mathbf{e}_\mu \cdot y^\nu \mathbf{e}_\nu = x^\mu y^\nu \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu \tag{8}$$

Comment calculer $\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu$: Math \Rightarrow Physique

♥ : Relier ce produit scalaire à la notion de distance dans l'espace temps : ♥

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$



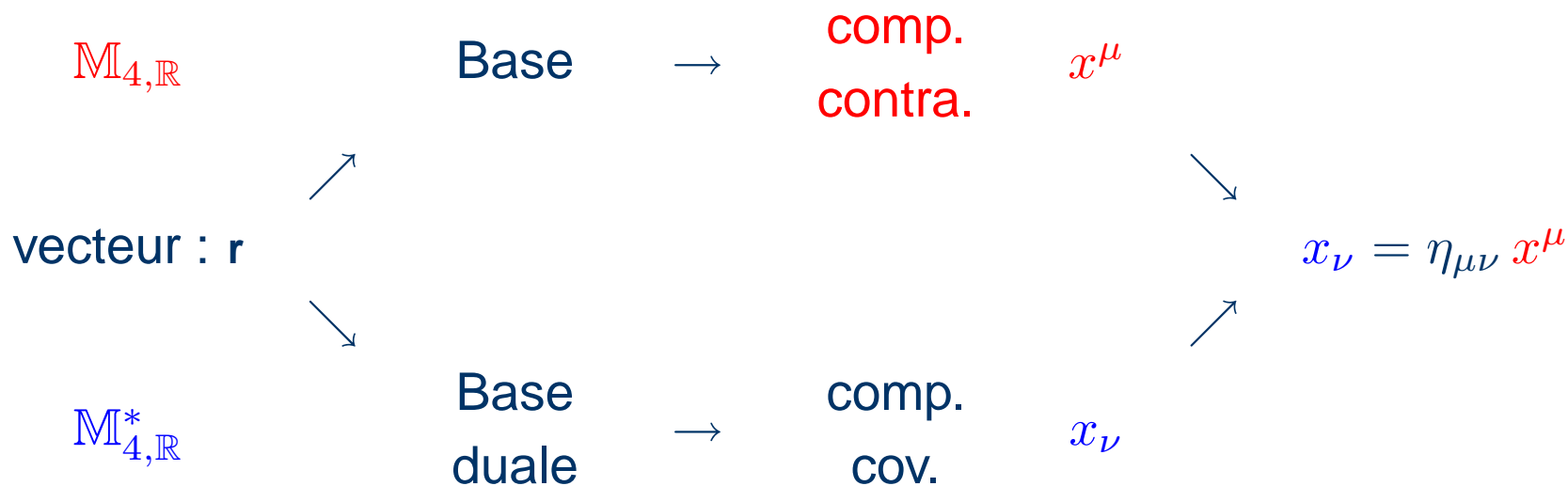
Métrieque de Minkowski

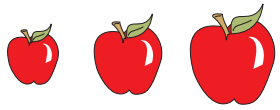
On pose donc

$$\eta_{\mu\nu} := \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ainsi} \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \quad (10)$$

🍌 Composante covariante

Posons $y_\mu = \eta_{\mu\nu} y^\nu$ ainsi $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = x^\mu y_\mu$, on dit que y_μ est la composante covariante de l'évènement \mathbf{s} .





Changement de Base

En notant $\eta^{\mu\nu}$, l'inverse de $\eta_{\mu\nu}$, i.e. $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ on a $\eta^{\mu\alpha}\eta_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu$ et

$$x^\mu = \delta^\mu_\nu x^\nu = \eta^{\mu\alpha}\eta_{\alpha\nu}x^\nu = \eta^{\mu\alpha} x_\alpha \quad (11)$$

$\eta_{\mu\nu}$ et $\eta^{\mu\alpha}$: ascenseur pour les indices d'un évènement.



Changement de base

$\mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}'$: Transformation de Lorentz

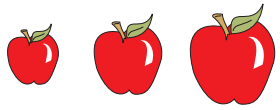
$$x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu \quad (12)$$

pour peu que

$$L^\mu_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

on peut alors jouer avec l'ascenseur ...




$$L^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\mu} L_\mu^\beta, \quad L_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\mu} L_\beta^\mu, \quad \dots \quad (14)$$



4-vecteurs de la physique

Définition

4–vecteur physique (ou quadrivecteur) : tout ensemble ordonné de 4 quantités physiques, qui se transforme *comme* les composantes de la 4–position lors d'un changement de référentiel.

-  Toute quantité physique réunissant 4 nombres n'est pas forcément un quadrivecteur.
-  Les composantes contravariantes a^μ d'un quadrivecteur a se décomposent en une composante temporelle a^0 et un 3-vecteur \vec{a} appelé composante spatiale
-  Si $a^\mu = (a^0, \vec{a})$, alors $a_\mu = (a_0 = a^0, -\vec{a})$

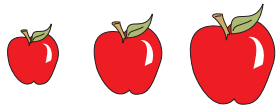
4–vitesse

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \Rightarrow u^\mu = (\gamma c, \gamma \vec{v}) \quad (15)$$

On remarque que $\mathbf{u}^2 = u^\mu u_\mu = \gamma^2 (c^2 - v^2) = \gamma^2 c^2 (1 - \beta^2) = c^2$

4–accélération

$$\Gamma = \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = \gamma \frac{d\mathbf{u}}{dt} \Rightarrow \Gamma^\mu = \gamma \left(c \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \vec{v} + \gamma \vec{a} \right) \quad (16)$$



4-vecteurs électromagnétiques



Densité de courant

Conservation de la charge

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

réécriture

$$\frac{\partial}{\partial (ct)} (c\rho) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0 \quad (17)$$

Notation :

$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (18)$$

l'équation de continuité (17) se réécrit simplement

$$\partial_\mu \left(\rho \frac{dx^\mu}{dt} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad J^\mu := \rho \frac{dx^\mu}{dt} \quad (19)$$

J^μ : comp. cov. d'un 4-vecteur $J^\mu = (\rho c, \vec{j})$, \vec{j} = 3-courant classique.

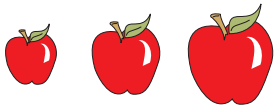


Conservation de la charge



$$\partial_\mu J^\mu = 0$$





4-vecteur d'onde

Onde monochromatique de fréquence ω et de vecteur d'onde \vec{k} .

$$\text{Phase : } \varphi = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} \quad (20)$$

φ est un 4-scalaire ... qui permet de "découvrir" un nouveau 4-vecteur

$k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k} \right)$ le 4-vecteur d'onde car

$$\varphi = k_\mu x^\mu \quad (21)$$

 k_μ est isotrope : $k_\mu k^\mu = 0$

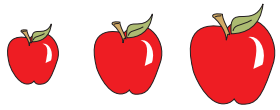
 Changement de base ...

donc $k'^\mu = L^\mu_\nu k^\nu \quad (22)$

$$\begin{cases} \omega' & = & \gamma (\omega - vk_x) & (a) \\ k'_x & = & \gamma (k_x - \beta\omega/c) & (b) \end{cases} \quad (23)$$

(23–a) : Effet Doppler relativiste (si $\gamma \approx 1$, $\omega' = \omega - vk$)

(23–b) : aberration relativiste de la lumière.



Pour les puristes ...



Définition fondamentale

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension *finie*, et E^* son dual

$$\mathcal{T}_2 = E^* \otimes E^* = \{ \text{applications linéaires continues de } E \times E \text{ dans } \mathbb{K} \}$$

Un élément de \mathcal{T}_2 est appelé tenseur d'ordre 2, deux fois covariant.

Construction

$$E = (E^*)^* \implies \mathcal{T}_1^1 = E \otimes E^* .$$

... etc...

$$\mathcal{T}_p^q = (E^*)^{\otimes q} \otimes (E)^{\otimes p}$$

Eléments de \mathcal{T}_p^q : tenseurs q fois covariants et p fois contravariants ...



Définition pratique

Théorème de Cartan : un objet à $p + q$ indices est un tenseur si et seulement si chacun de ses indices subit une transformation de Lorentz "régulière"

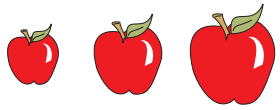
Exemple : $T_{\alpha}^{\beta}{}_{\mu}$ issu d'un tenseur d'ordre 3, deux fois covariant et une fois contravariant ssi

$$T'_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\mu} = L_{\alpha}{}^{\sigma} L_{\mu}{}^{\nu} L^{\beta}{}_{\rho} T_{\sigma}{}^{\rho}{}_{\nu} \quad (24)$$



Propriétés

Symétrie : $T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$, antisymétrie : $T_{\alpha\beta} = -T_{\beta\alpha}$, Contraction $T_{\alpha}{}^{\alpha}{}_{\beta} = T_{\beta}$, ...



Calcul vectoriel différentiel

 4-nabla

$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (25)$$

 4-gradient d'un 4-scalaire (= 4-vecteur)

$$\partial_\mu f := f_{,\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \vec{\nabla} f \right)$$

 4-divergence d'un 4-vecteur (= 4-scalaire)

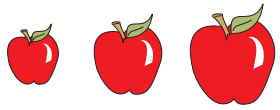
$$\partial_\mu A^\mu = \partial^\mu A_\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial a^0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{a} \quad (26)$$

 4-rotationnel (tenseur d'ordre 2)

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (27)$$

 4-laplacien

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \partial_\mu \partial^\mu \quad (28)$$



Question importante ...

$\partial_\mu A^\nu$ ou $\partial^\mu A_\nu$ objets tensoriels ?

Vérification : $\partial'_\mu = L_\mu^\alpha \partial_\alpha$ et $A'^\nu = L^\nu_\beta A^\beta$ ainsi

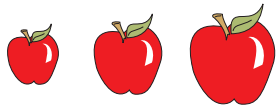
$$\begin{aligned}\partial'_\mu A'^\nu &= L_\mu^\alpha \partial_\alpha (L^\nu_\beta A^\beta) \\ &= A^\beta L_\mu^\alpha \partial_\alpha (L^\nu_\beta) + L_\mu^\alpha L^\nu_\beta \partial_\alpha A^\beta\end{aligned}\tag{29}$$

la transformation de Lorentz est linéaire, ainsi les composantes L^ν_β sont toutes constantes, et ses dérivées sont donc nulles ... ouf !

$$\partial'_\mu A'^\nu = L_\mu^\alpha L^\nu_\beta \partial_\alpha A^\beta\tag{30}$$

et l'on assiste à une transformation correcte, qui confère donc le statut de tenseur de rang 2 à l'objet dont la composante mixte est $\partial_\alpha A^\beta$.

Si le changement se fait vers un repère non inertiel ... tout s'écroule !



Application ... électromagnétisme !

Mécanique classique

$$S = \int \mathcal{L} dt . \quad (31)$$

Extremum \iff Mouvement

Relativité restreinte

$$S = \underbrace{-mc \int ds}_{\text{P libre}} \underbrace{-q \int A_\mu J^\mu dV dt}_{\text{int. CP}} \underbrace{+k \int F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} dV dt}_{\text{C libre}} \quad (32)$$

 Mouvement de particules chargées dans un champ fixe

$$\frac{\delta S}{\delta x^\mu} = 0 \implies m \frac{d u_\mu}{d\tau} = q F_{\mu\nu} u^\nu \quad (33)$$

$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ est un 4-rotationnel, $\partial_\alpha F_{\mu\nu} = 0 \implies 2$ Maxwell's

 Champ crée par une distribution de charges

$$\frac{\delta S}{\delta A_\mu} = 0 \implies \partial_\nu F^{\nu\mu} = \mu_0 J^\mu \quad (34)$$

2 autres Maxwell's ...